Ασκηση 1

Έστω $a_1 = 5$, $a_2 = -5$, $a_3 = 8$ και $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$, για $n > 3$.

Να βρείτε $\overline{\lim} a_n$ και $\underline{\lim} a_n$

Για $n = 4k + u$, όπου $k \in \mathbb{Z}$ και $u = 0, 1, 2, 3$ έχουμε:

- Αν $u = 0$, τότε, $a_n = \sin\frac{4k\pi}{2} = \sin 2k\pi = 0$, $k \in \mathbb{Z}$
- Αν $u = 1$, τότε, $a_n = \sin\frac{4k\pi + \pi}{2} = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$, $k \in \mathbb{Z}$
- Αν $u = 2$, τότε, $a_n = \sin\left(\frac{4k\pi + 2\pi}{2}\right) = \sin(2\pi + \pi) = -1$, $k \in \mathbb{Z}$
- Αν $u = 3$, τότε, $a_n = \sin\left(\frac{4k\pi + 3\pi}{2}\right) = -1$, $k \in \mathbb{Z}$

$\underline{\lim} a_n = \sup_k \{\inf\{a_n : n \geq k\}\}$

→ Αν $k = 1$ τότε, $\inf\{a_n, n \geq 1\} = -5$
→ Αν $k = 2$, τότε $\inf\{a_n, n \geq 2\} = -1$
→ Αν $k = 3$, τότε $\inf\{a_n, n \geq 3\} = -1$
→ Αν $k > 3$, τότε $\inf\{a_n, n \geq k\} = -1$

Άρα $\sup_k \{\inf\{a_n : n \geq k\}\} = -1$

Όμοια, $\overline{\lim} a_n = \inf_k \{\sup\{a_n : n \geq k\}$

→ Αν $k = 1$, τότε $\sup\{a_n, n \geq 1\} = 8$
→ Αν $k = 2$, τότε $\sup\{a_n, n \geq 2\} = 8$
→ Αν $k = 3$, τότε $\sup\{a_n, n \geq 3\} = 1$
→ Αν $k > 3$, τότε $\sup\{a_n, n > k\} = 1$

Άρα $\inf_k \{\sup\{a_n : n \geq k\}\} = 1$

Ασκηση 2

$a_n = n\left(1 + \sin\frac{n\pi}{2}\right), n \in \mathbb{N}.$

Να βρείτε το $\underline{\lim} a_n$ και $\overline{\lim} a_n$

$-1 \leq \sin\frac{n\pi}{2} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Άρα $0 \leq 1 + \sin\frac{n\pi}{2} \leq 2$, οποτε $0 \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

- Αν $n = 4k-1$, $k \in \mathbb{Z}$, τότε, $\sin\left(\frac{(4k-1)\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Άρα, αν $\lambda_n = 4n-1$, $a_{\lambda_n} = 0$ και συνεπως $\lim a_{\lambda_n} = 0$

Οποτε $\underline{\lim} a_n = 0$

- Αν $k_n = 4n$, $k_n \to +\infty$ και $\sin\frac{k_n\pi}{2} = \sin\frac{4n\pi}{2} = 0$

και $\lim a_{k_n} = +\infty$, οποτε $\overline{\lim} a_n = +\infty$

Προταση

Έστω $y \in A''$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$. Το $\lim_{x \to y} f(x)$ υπάρχει και είναι ένας πραγματικός αριθμός αν-ν ισχύει ότι:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): x_1, x_2 \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Αποδειξη

$(\Rightarrow)$ Έστω ότι $\lim_{x \to y} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ τότε:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$, τότε $(\exists \delta > 0)$ τέτοιο ώστε $x \in B_0(y, \delta) \cap A$ $\Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$. Για οποιοδηποτε $x_1 \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow$ $|f(x_1) - \ell| < \varepsilon/2$. Επίσης, για οποιοδηποτε $x_2 \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow$

$|f(x_2)-\ell| < \varepsilon/2$ τότε: $|f(x_1)-f(x_2)| = |f(x_1)-\ell+\ell-f(x_2)| \le$
$\le |f(x_1)-\ell| + |f(x_2)-\ell| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Άρα εάν $\lim\limits_{x\to y} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ τότε $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)$ τ.ω. $x_1, x_2 \in B_0(y,\delta)$
$\Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$

($\Leftarrow$) Έστω ότι $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)$ $x_1, x_2 \in B_0(y,\delta) \Rightarrow$
$|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$
Θα δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to y} f(x)$ υπάρχει και είναι ένας πραγματικός αριθμός.
Αρκεί ν.δ.ο. $\forall (x_n) \subseteq A\setminus\{y\}$, $\lim\limits_n x_n = y$, ισχύει ότι:
$\lim f(x_n) = \ell \in \mathbb{R}$.
Έστω, $(x_n) \subseteq A\setminus\{y\}$ και $\lim x_n = y$. Δηλαδή $\forall \delta>0$,
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $0<|x_n-y|<\delta$, $\forall n \ge n_0$
Έστω, $\varepsilon>0$ και $\delta>0$, τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $0<|x_n-y|<\delta$, $\forall n \ge n_0$. Θεωρώ $n_1, n_2 > n_0$ και τότε $0<|x_{n_1}-y|<\delta$ και $0<|x_{n_2}-y|<\delta$. (δηλ. $x_{n_1}, x_{n_2} \in B_0(y,\delta)$), οπότε από υπόθεση, έχω ότι $|f(x_{n_1})-f(x_{n_2})|<\varepsilon$
Άρα $(\forall \varepsilon>0)(\exists n_0>0)$ τ.ω. $|f(x_{n_1})-f(x_{n_2})|<\varepsilon$, $\forall n_1, n_2 > n_0$
Άρα η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ βασική στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ο οποίος είναι πλήρης.
Άρα η $(f(x_n))$ συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του $\mathbb{R}$.
Θα δείξουμε ότι $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με τις παραπάνω ιδιότητες οι αντίστοιχες $f(x_n)$ συγκλίνουν στο ίδιο όριο.
Έστω ότι δεν ισχύει. Δηλαδή $\exists (x_n)$ και (y_n) στο $A\setminus\{y\}$ με $\lim f(x_n) = \ell_1$ και $\lim f(y_n) = \ell_2$ και $\lim y_n = \lim x_n = y$.
Θεωρούμε την $(\omega_n) = \begin{cases} x_n, & n \text{ περιττός} \\ y_n, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$
Τότε $\lim \omega_n = y$.
Επομένως, $\exists \ell_3 \in \mathbb{R}$: $\lim f(\omega_n) = \ell_3$. Αλλά $(f(x_n))$ είναι υπακολουθία της $(f(\omega_n))$
Άρα αφού $(f(\omega_n))$ συγκλίνει, η $(f(x_n))$ συγκλίνει ως

υπακολουθία και έχω $l_1 = l_3$ (1)

- Όμοια, $(f(y_n))$ υπακολουθία της $f(w_n)$ άρα συγκλίνει και έχω ότι $l_2 = l_3$ (2)
- Τελικά, από (1), (2) $\Rightarrow l_1 = l_2$

ΑΝΩΤΕΡΟ ΚΑΙ ΚΑΤΩΤΕΡΟ ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ και $y \in A''$.

Το ανώτερο όριο της f στο y ορίζεται να είναι το
$$\limsup_{x \to y} f(x) = \inf_{\delta} \sup\{ f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\}$$

Το κατώτερο όριο της f στο y ορίζεται να είναι το
$$\liminf_{x \to y} f(x) = \sup_{\delta > 0} \inf\{ f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\}$$

Συντομοι Συμβολισμοί

- $\limsup\limits_{x \to y} f(x)$ ή $\overline{\lim\limits_{y}} f(x)$
- $\liminf\limits_{x \to y} f(x)$ ή $\underline{\lim\limits_{y}} f(x)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το $\overline{\lim\limits_{y}} f(x)$ και $\underline{\lim\limits_{y}} f(x)$ υπάρχουν πάντα ως στοιχεία του $\mathbb{R}^*$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ και $y \in A''$, ισχύει ότι
$$\underline{\lim_{y}} f(x) \leq \overline{\lim_{y}} f(x)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\delta_1, \delta_2 > 0$ και $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Τότε έχουμε:

$\inf\{f(x) : x \in B_0(y, \delta_1) \cap A\} \leq \inf\{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} \leq$

$\leq \sup\{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} \leq \sup\{f(x) : x \in B_0(y, \delta_2) \cap A\}$

Άρα $\inf\{f(x) : x \in B_0(y, \delta_1) \cap A\} \leq \sup\{f(x) : x \in B_0(y, \delta_2) \cap A\}$

Οπότε, για $\delta_2 > 0$ παίρνοντας το $\sup\limits_{\delta_1 > 0} \inf\{f(x) : x \in B_0(y, \delta_1) \cap A\}$

$\leq \sup\limits_{\delta_2 > 0}\{f(x) : x \in B_0(y, \delta_2) \cap A\}$

Δηλαδή, για τυχαίο $\delta_2 > 0$ $\underline{\lim\limits_{y}} f(x) \leq \sup\{f(x) : x \in B_0(y, \delta_2) \cap A\}$

Άρα $\underline{\lim\limits_{y}} f(x)$ είναι κάτω φράγμα για τα σύνολα $\{s\delta_2 : \delta_2 > 0\}$

Εφόσον, το inf είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα, το

$\underline{\lim\limits_{y}} f(x) = \inf\limits_{\delta_2 > 0}\{\sup\{f(x) : x \in B_0(y, \delta_2) \cap A\}\} = \overline{\lim\limits_{y}} f(x)$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ και $y \in A''$ τότε ισχύει

i) $\overline{\lim\limits_{y}} f(x) \leq \mu$ αν-ν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \leq \mu + \varepsilon$

ii) $\underline{\lim\limits_{y}} f(x) \geq \mu$ αν-ν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \geq \mu - \varepsilon$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) $(\Rightarrow)$ Έστω $\overline{\lim\limits_{y}} f(x) \leq \mu$, τότε $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \overline{\lim\limits_{y}} f(x) < \mu + \varepsilon$

Δηλαδή, $\inf\limits_{\delta > 0} \sup\{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} < \mu + \varepsilon$

Άρα, εφόσον το inf είναι αυστηρά μικρότερο του $\mu + \varepsilon$, έπεται ότι $\exists \delta>0$ τ.ω. $\sup\{f(x): x\in B_0(y,\delta)\cap A\} < \ell+\varepsilon$

Άρα και κάθε όρος του συνόλου είναι μικρότερος του $\ell+\varepsilon$,
δηλαδή $f(x) < \ell+\varepsilon \ \forall x\in B_0(y,\delta)\cap A$

($\Leftarrow$) Έστω $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\ x\in B_0(y,\delta)\cap A \Rightarrow f(x)\leq \ell+\varepsilon$

Έστω $(\varepsilon>0)$, τότε θα $\exists\delta>0$ τ.ω. $x\in B_0(y,\delta)\cap A \Rightarrow f(x)\leq \ell+\varepsilon$

Συνεπώς, εφόσον $\sup\{f(x): x\in B_0(y,\delta)\cap A\}\leq \ell+\varepsilon$

Εφόσον, τα παραπάνω ισχύουν για κάποιο $\delta>0$, έπεται ότι
και το $\inf\limits_{\delta^*>0}\{\sup\{f(x): x\in B_0(y,\delta^*)\cap A\}\}\leq \ell+\varepsilon$, δηλαδή

$\limsup\limits_{x\to y} f(x)\leq \ell+\varepsilon$

Τα παραπάνω ισχύουν για τυχόν $\varepsilon>0$.
Παίρνω $\varepsilon\to 0$ και έχω $\overline{\lim\limits_{y}} f(x)\leq \ell$.

ii) Ονδο $\underline{\lim\limits_{y}} f(x)\geq \ell$ αν-ν $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0): x\in B_0(y,\delta)\cap A$
$\Rightarrow f(x)\geq \ell-\varepsilon$

$\underline{\lim\limits_{y}}(-f(x)) = \sup\limits_{\delta>0}\{\inf\{-f(x): x\in B_0(y,\delta)\cap A\}\} =$

$\sup\limits_{\delta>0}\{-\sup\{f(x), x\in B_0(y,\delta)\cap A\}\} =$

$-\inf\limits_{\delta>0}\{\sup\{f(x): x\in B_0(y,\delta)\cap A\}\} = -\overline{\lim\limits_{y}} f(x)$

$\overline{\lim\limits_{y}} f(x)$

Έστω $\underline{\lim\limits_{y}} f(x)\geq \ell$. Τότε $-\limsup\limits_{x\to y}(-f(x))\geq \ell$ ή

$\overline{\lim\limits_{y}}(-f(x))\leq -\ell$.

Συνεπώς, σύμφωνα με το (ii) έχουμε ότι $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)$:
$x \in B_0(y,\delta)\cap A \Rightarrow -f(x) \leq -\mu + \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq \mu - \varepsilon$